第二章　特征标理论

§1. 特征标的基本概念

简单地：
判定不可约性
判定等价性

(V,ρ) = G的F-表示

定义2.1.1. $\chi_\rho : G \to \mathbb{F}$　　$\chi_\rho(g) := \operatorname{tr} \rho(g)$

↑ ρ的$\mathbb{F}$-特征标

χ_ρ 线性特征标 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\deg \chi_\rho = 1$　　$\deg \chi_\rho := \deg \rho$

χ_ρ 不可约特征标 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ρ 不可约

$\operatorname{Irr}_{\mathbb{F}}(G)$ = {不可约特征标集}

$\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^+(G)$ = {F-表示}/$\cong$　：全体不同构F-表示集

$ch_{\mathbb{F}}^+(G) = \{ \chi_\rho \mid \rho \in \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^+(G) \}$ 含幺半群

基本性质2.1.2.

1). $\rho_1 \cong \rho_2 \Rightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$　✓（是一个不变量）

2). $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(hgh^{-1})$　✓（为一个类函数）

3). $\chi_\rho(1) = \deg \rho \cdot 1_{\mathbb{F}}$　✓（读出表示的维数量）

4). $0 \to U \to V \to V/U \to 0 \Rightarrow \chi_{\rho_V} = \chi_{\rho_U} + \chi_{\rho_{V/U}}$　✓（可加性）

5). $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$　　$(\rho_1 \otimes \rho_2)_{B_1 \otimes B_2}(g) = \rho_{1 B_1}(g) \otimes \rho_{2 B_2}(g)$　可乘性

6). $\chi_{\rho_1 \# \rho_2}(g_1, g_2) = \chi_{\rho_1}(g_1) \cdot \chi_{\rho_2}(g_2)$

7). α = 线性，χ = 不可约 $\Rightarrow$ $\alpha \cdot \chi$ = 不可约.

8). $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$　　$\rho^*_{B^*}(g) = (\rho_B(g)^T)^{-1} = \rho_B(g^{-1})^T$

9). $N \lhd G$. $\operatorname{Irr}_{\mathbb{F}}(G/N) = \{ \chi_\rho \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{F}} G \mid \ker \rho \supseteq N \}$

10). $\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$　（复共轭）

11). $g^m = 1 \Rightarrow \chi_\rho(g)$ 为 $\deg \rho$ 个 m次单位根之和

$\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow |\chi_\rho(g)| \le \chi_\rho(1)$

- "=" $\Leftrightarrow$ $\rho(g) = \omega \cdot 1_V$
- $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(1) \Leftrightarrow \rho(g) = 1_V$.　(i.e. $\ker \rho = \{ g \in G \mid \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1) \}$)

例 2.1.3. i) 单位表示 $1_G=(\mathbb{F},1)$. 仍记 1_G 为其特征标. 则 $1_G(g)=1\ \forall g$.

ii) $\chi_{reg}(g)=\begin{cases}|G| & g=1\\ 0 & g\neq 1\end{cases}$

iii) $G=\langle g\rangle$ p阶循环群. $V=\mathbb{Q}(g-1)\oplus\mathbb{Q}(g^2-g)\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}(g^{p-1}-g^{p-2})\subseteq\mathbb{F}G$

$$\Rightarrow \chi(g^t)=\begin{cases}p-1 & t=0\\ -1 & 1\leq t\leq p-1\end{cases}$$

$$g^i(g-1,g^2-g,\cdots g^{p-1}-g^{p-2})=(g-1,g^2-g,\cdots g^{p-1}-g^{p-2})\begin{pmatrix} & & & -1 & 1 & & \\ & & & -1 & & \ddots & \\ 1 & & & \vdots & & & 1\\ & 1 & & \vdots & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & -1 & & \end{pmatrix}$$

特征标表 2.1.4.

G的全体共轭类

	C_1	$\cdots$	C_j	$\cdots$	C_s
χ_1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
χ_i	χ_{i1}	$\cdots$	χ_{ij}	$\cdots$	χ_{is}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
χ_t	χ_{t1}	$\cdots$	χ_{tj}	$\cdots$	χ_{ts}

($\chi_1,\dots,\chi_t$: 全体的不可约特征标)

例

S_2	(1)	(12)
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

	1	3	2
S_3	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	n_3	a	b

$1^2+1^2+n_3^2=6\Rightarrow n_3=2$

列正交 $\Rightarrow\begin{cases}1-1+an_3=0\Rightarrow a=0\\ 1+1+bn_3=0\Rightarrow b=-1\end{cases}$

例: $(\mathbb{F}X,\varphi)$ 置换表示. $\chi=\chi_\varphi$ 则

$$\chi(g)=|X^{g=1}|=|\{x\in X\mid gx=x\}|$$

例: $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/G')=\{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G\mid\chi(1)=1\}$

例: $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G\Rightarrow(\bar{\chi}:g\mapsto\overline{\chi(g)})\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$.

例: $\sum_{i=1}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g)=?$ $\chi_1\cdots\chi_s$ 全体不可约 & $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid|G|$. & $\bar{\mathbb{F}}=\mathbb{F}$.

§2.2 特征标的正交关系

定义 2.2.1 $\varphi,\psi: G\to\mathbb{F}$

$$(\varphi,\psi) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\psi(g^{-1})$$

$\chi_1,\chi_2: G\to\mathbb{C}$ 两复特征标

$$(\chi_1,\chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}$$

$\underline{V\otimes W^*} \simeq Hom_{\mathbb{F}}(W,W)$

$(V\otimes W^*)^{G=1} \cong Hom_G(W,V)$

定理 2.2.2 (第一正交关系) char $\mathbb{F}\nmid |G|$. $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ 不可约. 则

$$(\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_2}) = \begin{cases}\dim_{\mathbb{F}} Hom_G(V_1,V_1)\cdot 1_{\mathbb{F}} & \rho_1\simeq\rho_2\\ 0 & \rho_1\not\simeq\rho_2\end{cases}$$

特别地， · $\mathbb{F}$ 分裂 $\Rightarrow (\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_2}) = \begin{cases}1 & \rho_1\simeq\rho_2\\ 0 & \rho_1\not\simeq\rho_2\end{cases}$

$(V,\rho)\in \mathcal{R}^+_{\mathbb{F}}(G) \rightsquigarrow \chi=\chi_\rho.$

$$Inv_G(V) = V^G = \{v\in V \mid gv=v\ \forall g\}\subseteq V$$

$\chi_{Inv_G(V)} :=$ $Inv_G(V)$ 的特征标

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\begin{pmatrix}\mathbb{C}^*(-1)^m & \\ & \mathbb{C}^*(-1)^n\end{pmatrix}$ (m, n)

性质 2.2.3. $$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Inv_G(V)}(g)$$

Pf: $z := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\in End_G(V)$ 为幂等. (i.e. $z^2=z$)

断言: $Inv_G(V) = V_1 := \{v\in V \mid zv=v\}$

("$\subseteq$"✓, "$\supseteq$": $gv = g.zv = (gz)v = z.v = v$)

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = tr(z) = tr(z|_{V_1}) = tr\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)|_{V_1}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Inv_G(V)}(g)$$

性质 2.2.4 $$(\chi_U,\chi_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Hom_G(U,V)}(g)$$

Pf: $$(\chi_U,\chi_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g^{-1})\chi_V(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{U^*}(g)\chi_V(g)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{U^*\otimes V}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Hom_{\mathbb{F}}(U,V)}(g)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Inv_G(Hom_{\mathbb{F}}(U,V))}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Hom_G(U,V)}(g)$$

Pf of Thm 2.2.2:

$$(\chi_1,\chi_2)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)}(g)=\dim_{\mathbb{F}}\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)\cdot 1_{\mathbb{F}}\qquad\square$$

定理 2.2.6 (不可约分解重数) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$. $V=n_1V_1\oplus\cdots\oplus n_sV_s$ 则

$$n_i=\frac{(\chi,\chi_i)}{\hom_G(V_i,V_i)}\qquad 1\leqslant i\leqslant s$$

特别地, $\mathbb{F}$ 分裂 $\Rightarrow n_i=(\chi,\chi_i)$.

Pf: $(\chi,\chi_i)=\left(\sum_{j=1}^{s}n_j\chi_j,\chi_i\right)=\sum_{j=1}^{s}n_j(\chi_j,\chi_i)=n_i(\chi_i,\chi_i)=n_id_i$ $\square$

定理 2.2.7 (表示等价的判别法) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$. $\rho_1,\rho_2\in R_{\mathbb{F}}^{+}(G)$.

1) $\rho_1\cong\rho_2\Leftrightarrow\chi_{\rho_1}=\chi_{\rho_2}$

2) $|\overline{\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}}\,G|=|\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}\,G|$

Pf: 1) $\Rightarrow$): ✓

$\Leftarrow$): Thm 2.2.6.

注: $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=p>0$. $V_1=\mathbb{F}^p$ $\rho_1(g)=1_{V_1}$, $V_2=\mathbb{F}^{2p}$ $\rho_2(g)=1_{V_2}$ $\Big\}\Rightarrow\chi_{\rho_1}=0=\chi_{\rho_2}$

What about $\dim\rho_i<p$?

定理 2.2.8 (不可约判别法) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$ $\chi=\chi_\rho$. 则

$$\rho\text{ 不可约}\overset{\mathbb{F}\text{分裂}}{\Longleftrightarrow}(\chi,\chi)=1$$

Pf: $\rho=n_1\rho_1\oplus\cdots\oplus n_r\rho_r$. $\chi_i=\chi_{\rho_i}$

$\Rightarrow(\chi,\chi)=\sum_{i=1}^{r}n_i^2(\chi_i,\chi_i)$ $\Rightarrow\rho=$ 不可约 iff $(\chi,\chi)=1$.

例: $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ & $G=\langle g\rangle\cong\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. $V=\{\sum_i a_ig^i\mid\sum a_i=0\}$

则 V 不可约 & $\dim\mathrm{Hom}_G(V,V)=4$. (特别地, $(\chi,\chi)=0$!)

例: ρ_{tri} 在 ρ 中重数为 $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$

例: $(\mathbb{F}X,\rho)$ 置换表示, 则 $(\chi_\rho,1_G)=X$ 中轨道数

§2.3. 分裂域上不可约常表示的个数

$\mathbb{F}$ 分裂，$\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid |G|$

定义 2.3.1. 称 $\varphi: G \to \mathbb{F}$ 为**类函数**，若 $\varphi(h^{-1}gh) = \varphi(g)\ \forall g, h \in G$

$$cf_{\mathbb{F}}(G) = \{\varphi: G \to \mathbb{F} \mid \varphi \text{为类函数}\}$$

性质：$\dim_{\mathbb{F}} cf_{\mathbb{F}}(G) = G$ 的共轭类个数

Pf $C_1, \cdots, C_s$ 全部共轭类. $\varphi_i(C_j) := \delta_{ij} \Rightarrow \varphi_1, \cdots, \varphi_s$ 为一组基 $\Rightarrow$ ✓.

定理 2.3.2. $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid |G|$ & $\mathbb{F}$ 分裂. 则全体不可约特征标构成 $cf_{\mathbb{F}}(G)$ 的一组基.

$$f = \sum_{\chi} (f, \chi) \cdot \chi$$

推论：不可约表示数 = 共轭数.

引理 2.3.3. $f \in cf_{\mathbb{F}}(G)$. $(V, \rho) \in \mathcal{R}^+_{\mathbb{F}}(G)$. $\rho_f = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \cdot \rho(g) \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$

i) $\rho_f \in \mathrm{End}_G(V)$

ii) $\rho_{f_1 + f_2} = \rho_{f_1} + \rho_{f_2}$

iii) $\rho_{cf} = c \cdot \rho_f$

iv) $(\rho_1 \oplus \rho_2)_f = (\rho_1)_f \oplus (\rho_2)_f$

$$cf_{\mathbb{F}}(G) \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}_G(V)$$

引理 A. $(V, \rho) = n$ 维不可约. 则

i) $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \nmid n$

ii) $\forall f \in cf_{\mathbb{F}}(G). \Rightarrow \rho_f = \frac{(f, \chi_{\rho^*})}{n} \cdot 1_V$ (V^*, ρ^*) 对偶表示

Pf: V = 不可约, $\rho_f \in \mathrm{End}_G(V) \Rightarrow \rho_f = \lambda_f \cdot 1_V \overset{tr}{\Rightarrow} tr\, \rho_f = n \cdot \lambda_f$

$$\Rightarrow n\lambda_f = tr(\rho_f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} tr(f(g) \cdot \rho(g))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \cdot \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \cdot \chi^*(g^{-1}) = (f, \chi^*)$$

引理 B. $f \in cf_{\mathbb{F}}(G)$. $(f, \chi) = 0\ \forall \chi \Rightarrow f = 0$.

Pf: $\rho_{reg} = \bigoplus_{i=1}^{t} m_i \rho_i$. $n_i := \dim_{\mathbb{F}} V_i$.

$$(\rho_{reg})_f = \bigoplus_{i=1}^{t} \frac{(f, \chi_i^*)}{n_i} 1_{V_i \oplus \cdots \oplus V_i} = 0$$

$$(\rho_{reg})_f (1) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \cdot (\rho_{reg}(g)(1))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \cdot g \in \mathbb{F}G$$

$\Rightarrow f(g) = 0 \ \forall g$

$\Rightarrow f = 0$.

Pf of thm 2.3.2: $\forall f \in cf_{\mathbb{F}}(G)$. $f' = f - \sum_{\chi} (f, \chi) \cdot \chi$

$\Rightarrow (f', \chi') = (f, \chi') - \sum_{\chi} (f, \chi) \cdot (\chi, \chi') = (f, \chi') - (f, \chi') = 0 \quad \forall \chi'$

$\Rightarrow f' = 0 \Rightarrow f = \sum_{\chi} (f, \chi) \cdot \chi \Rightarrow \checkmark$

$h_j := |C_j|$ 第j个共轭类个数

$\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}} G = \{\chi_1, \cdots, \chi_s\}$ $\quad \chi_{ij} = \chi_i(g_j) \quad \forall g_j \in C_j$

推论 2.3.5 (第一正交关系) $\frac{1}{|G|} \sum_{t=1}^{s} h_t \chi_i(g_t) \cdot \chi_j(g_t^{-1}) = \delta_{ij}$

$X A \bar{X}^T = |G| \cdot I_s$ $\qquad /\mathbb{C} \quad \frac{1}{|G|} \sum_{t=1}^{s} h_t \cdot \chi_{it} \overline{\chi_{jt}} = \delta_{ij}$

定理 (第二正交关系) 设 $g_j \in C_j$ $1 \le j \le s$. 则

$\bar{X}^T \cdot X = |G| \cdot A^{-1}$ $\qquad \sum_{i=1}^{s} \chi_i(g_j) \cdot \chi_i(g_k^{-1}) = \frac{|G|}{h_j} \delta_{jk}$

注: 只有证明了不可约表示个数等于共轭类个数，才知特征标表构成方阵

$/\mathbb{C} \quad \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{s} \chi_{ij} \overline{\chi_{ik}} = \frac{1}{h_j} \delta_{ij}$

$X A \bar{X}^T = |G| \cdot I_s$ $\quad \left(X = (\chi_{ij})_{s \times s} \ \ \bar{X} = (\chi_i(g_j^{-1}))_{s \times s} \ \ A = \mathrm{diag}(h_1, \cdots, h_s)\right)$

$\hookrightarrow \bar{X}^T \cdot X = |G| \cdot A^{-1}$

例 2.3.6. G = Abel 群 $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ 不可约复表示均为1维 $\overset{②}{\Leftrightarrow}$ G 有 $|G|$ 个不可约表示 $\overset{③}{}$

例 2.3.7. G 有 $[G:G']$ 个线性复特征标

例 2.3.8 $H \trianglelefteq G$. $H=$ abel

$$[G:H]=m \Rightarrow G \text{ 的不可约复表示不超过 } m \text{ 维}$$

$(V,\rho)=$ 复不可约.

$$\left.\begin{array}{r} U \subseteq (V,\rho_H) \text{ 子不可约表示} \\ H = \text{abel} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} U = 1 \quad (\text{设 } U = \mathbb{C}\cdot u)$$

$$\Rightarrow V = \sum_{g\in G} \mathbb{C}\cdot gu$$

$$G = g_1 H \sqcup \cdots \sqcup g_m H \Rightarrow V = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{C}\cdot g_i u \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V \leq m$$

例 2.3.9. $\mathbb{F}$ 分裂 G_1, G_2 & $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$. $G=G_1\times G_2$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr}_{\mathbb{F}} G_1 \times \operatorname{Irr}_{\mathbb{F}} G_2 & \xrightarrow{1:1} & \operatorname{Irr}_{\mathbb{F}} G \\ (\rho_1, \rho_2) & \longmapsto & \rho_1 \# \rho_2 \end{array}$$

Pf: $$(\chi_{\rho_1\#\rho_2}, \chi_{\rho_1\#\rho_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{(g_1,g_2)\in G} \chi_{\rho_1}(g_1)\chi_{\rho_2}(g_2)\chi_{\rho_1}(g_1^{-1})\chi_{\rho_2}(g_2^{-1})$$

$$= (\chi_{\rho_1},\chi_{\rho_1})\cdot(\chi_{\rho_2},\chi_{\rho_2}) = 1. \quad \square$$

§2.4 特征标表计算举例

例2.4.1.

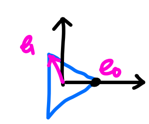
S_2	(1)	(12)
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

S_3	1 (1)	3 (12)	2 (123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	n_3	a	b

$1^2+1^2+n_3^2=6 \Rightarrow n_3=2$

列正交 $\Rightarrow \begin{cases} 1-1+a n_3=0 \Rightarrow a=0 \\ 1+1+b n_3=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$

S_4	1 (1)	6 (12)	8 (123)	3 $(12)(34)$	6 (1234)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	d_1 3	a 1	b 0	c -1	d -1
χ_5	d_2 3	-1	0	-1	1



$\longleftarrow S_4 \xrightarrow{\pi} S_3 = D_3$

$(1234) \mapsto (13)$

$(12)(34) \mapsto (1)$

$(123)(e_0, e_1) = (e_0, e_1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(12)(e_0, e_1) = (e_0, e_1)\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

$1^2+1^2+2^2+d_1^2+d_2^2=24 \Rightarrow d_1=d_2=3$

行正交 $\Rightarrow \begin{cases} 3+6a+8b+3c+6d=0 \\ 3-6a+8b+3c-6d=0 \\ 6-8b+6c=0 \\ 9+6a^2+8b^2+3c^2+6d^2=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-1 \\ d=-a \\ |a|=1 \end{cases}$

$a=\mathrm{tr}((12)) = \text{sum of } \pm 1 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (a,b,c,d) = (1,0,-1,-1)$ 或 $(-1,0,-1,1)$

例 2.4.2

A_4	1 (1)	4 (123)	4 (132)	3 $(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ζ_3	ζ_3^2	1
χ_3	1	ζ_3^2	ζ_3	1
χ_4	n	a	b	c

$A_4 \xrightarrow{\pi} A_3$

A_3	(1)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ_3	ζ_3^2
χ_3	1	ζ_3^2	ζ_3

$n^2+1^2+1^2+1^2=12 \Rightarrow n=3$ 列正交 $\Rightarrow a=0=b$ & $c=-1$

例2.4.3.

D4或Q = G（共轭：a 与 a^3；b 与 ba^2，ba 与 ba^3）

G	1	a	a^2	a^3	b	ba	ba^2	ba^3
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	$n=2$	$\alpha=0$	$\beta=-2$	$\gamma=0$	$\delta=0$	$\varepsilon=0$	$f=0$	$g=0$

$1^2+1^2+1^2+1^2+n^2=8 \Rightarrow n=2$

列正交 ⇒

$D_4=\langle a,b \mid a^4=b^2=1=(ba)^2\rangle$

$Q=\langle a,b \mid a^4=1,\ b^2=a^2,\ ba=a^3b\rangle$

$G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$1\ a\ a^2\ a^3\ b\ ab\ a^2b\ a^3b$

$\bar{a},\bar{b}$

$1\ a\ a^2\ a^3\ b\ ab\ a^2b\ a^3b$

注：D_4与Q有相同的特征标表.

例2.4.4

$D_n=\langle a,b \mid a^n=b^2=1=(ba)^2\rangle$　$[D_n:\langle a\rangle]=2 \Rightarrow \forall$不可约表示$\leq 2$维

其中 $\tau_\ell(a)=\begin{pmatrix}\zeta_n^{\ell} & \\ & \zeta_n^{-\ell}\end{pmatrix}$　$\tau_\ell(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$　$1\leq \ell \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]=\begin{cases} m-1 \\ m\end{cases}$

$baba=1 \Rightarrow ab=ba^{-1}$

$D_{2m}=\langle a,b \mid a^{2m}=b^2=1=(ba)^2\rangle$

↓

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$　⇒ 4+1维表示

$4\times 1^2+(m-1)\times 2^2=4m=|D_{2m}|$

$a\,ba^i\,a^{-1}=ba^{i-2}$

$b\,a^i\,b^{-1}=a^{-i}$

~~$b\,ba^i\,b^{-1}=ba^{-i}$~~

讨论共轭类

D_{2m}	1 (1)	a^m (1)	b (m)	ab (m)	a^k (2) $(1\leq k\leq m-1)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	$(-1)^m$	1	-1	$(-1)^k$
χ_4	1	$(-1)^m$	-1	1	$(-1)^k$
χ_{τ_ℓ} $(1\leq \ell\leq m-1)$	2	$(-1)^\ell$	0	0	$2\cos\frac{2k\ell\pi}{n}$

D_{2m+1}	1 (1)	b (n)	a^k (2) $(1\leq k\leq m)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_{τ_ℓ} $(1\leq \ell\leq m)$	2	0	$2\cos\frac{2k\ell\pi}{n}$

$2\times 1^2+m\times 2^2=4m+2=|D_{2m+1}|$

例 2.4.5

A_5	1 (1)	15 (12)(34)	20 (123)	12 (12345)	12 (13452)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	0	1	-1	-1
χ_3	5	1	-1	0	0
χ_4	n_4	a	a'	c	c'
χ_5	n_5	b	b'	d	d'

χ_1：权有的线性特征标

χ_2：$A_5 \curvearrowright \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $(\chi_1+\chi_2 = (5,1,2,0,0))$

χ_3：$A_5 \curvearrowright \{\{x_i, x_j\} \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$ $(\chi_1+\chi_2+\chi_3 = (10,2,1,0,0))$

$$60 = 1+4^2+5^2+n_4^2+n_5^2 \Rightarrow n_4 = n_5 = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} ((12)(34))^2 = 1 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z} \\ \text{列正交} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -2 \\ a^2+b^2 = 2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = -1$$

$$\text{列正交} \Rightarrow a'\overline{a'} + b'\overline{b'} = 0 \Rightarrow a' = b' = 0$$

- $y = (12345)$ 与 y^{-1} 共轭 $\Rightarrow \chi_4(y) = \chi_4(y^{-1}) = \overline{\chi_4(y)} \Rightarrow c = \chi_4(y) \in \mathbb{R}$

同理：$d, c', d' \in \mathbb{R}$

$$\text{列正交} \Rightarrow \begin{cases} c+d = 1 \\ c^2+d^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ d = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ d = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

§2.5 从特征标表读群的结构.

$\chi = \chi_\rho$.

$$\ker\chi := \{g\in G \mid \chi(g)=\chi(1)\} \overset{1.2.11^\circ}{=\!=} \ker\rho$$

性质 2.5.1. 设 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_s\}$. $\chi=\sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i$ $(n_i\geq 0)$. 则 $\ker\chi = \bigcap_{i:\,n_i>0}\ker\chi_i$.

特别地: $\bigcap_{i=1}^{s}\ker\chi_i = 1$.

Pf: "$\supseteq$": $\forall g\in \bigcap_{i:n_i>0}\ker\chi_i \Rightarrow \chi_i(g)=\chi_i(1)\ \forall i \Rightarrow \chi(g)=\sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i(g) = \sum_{i=1}^{s} n_i\chi_i(1) = \chi(1)$.

$\Rightarrow g\in\ker\chi$

"$\subseteq$": $\forall g\in\ker\chi \Rightarrow \chi(g)=\chi(1) \Rightarrow \rho(g)=1_V \Rightarrow \rho_i(g)=1_V$ ($\forall i$ s.t. $n_i>0$)

$\Rightarrow g\in\ker\chi_i$ ($\forall i$ s.t. $n_i>0$) $\Rightarrow g\in\bigcap_{i:n_i>0}\ker\chi_i$

令 $\chi=\chi_{\mathrm{reg}}$. 则 $1=\ker\chi_{\mathrm{reg}} = \bigcap_{i=1}^{s}\ker\chi_i$.

性质: $N\trianglelefteq G \Rightarrow N = \bigcap_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G \\ N\subseteq\ker\chi}} \ker\chi$

Pf: "$\subseteq$": ✓

"$\supseteq$": $G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G/N \xrightarrow{\tau} GL(\mathbb{F}(G/N))$

$$\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/N) = \{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \mid \ker\chi\supseteq N\}$$

$$N = \ker\pi = \ker(\tau\circ\pi) = \bigcap_{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/N)}\ker\chi = \bigcap_{\substack{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)\\ N\subseteq\ker\chi}}\ker\chi$$

命题 2.5.2. $G=$单群 $\Leftrightarrow \ker\chi=1\ \forall\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G\setminus\{$单位特征标$\}$

命题 2.5.3. 商群特征标表可从群的特征标表读出.

$$\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/N) = \{\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \mid \ker\chi\supseteq N\}$$

命题 2.5.4.（换位子群） $G' = \bigcap_{\substack{\chi : Irr \\ \chi(1)=1}} \ker\chi$

Pf: $Irr_{\mathbb{C}} G/G' = \{ \chi \in Irr_{\mathbb{C}} G \mid G' \leq \ker\chi \} = \{ \chi \in Irr_{\mathbb{C}} G \mid \chi(1)=1 \}$ □

$\forall \chi \in ch_{\mathbb{C}}^{+}(G)$. $Z(\chi) := \{ g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1) \}$

$= \{ g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\cdot\zeta,\ \zeta$ 单位根 $\}$

$= \{ g \in G \mid \varphi(g) = \zeta \cdot 1_V\ \ \zeta$ 单位根 $\}$

命题 2.5.5（中心） $Z(G) = \bigcap_{\chi \in Irr_{\mathbb{C}} G} Z(\chi)$

Pf: "$\subseteq$": $g \in Z(G) \Rightarrow \varphi(g) \in End_G(V)$ $\forall (V,\varphi) \in Irr_{\mathbb{C}} G$.

$\overset{schur}{\Rightarrow} \varphi(g) = \omega \cdot 1_V$ $\forall \varphi = Irr$.

$\Rightarrow g \in \bigcap_{\chi \in Irr_{\mathbb{C}} G} Z(\chi)$

"$\supseteq$": $\forall g \in \bigcap_{\chi} Z(\chi) \Rightarrow \varphi(g^{-1}h^{-1}gh) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1}\varphi(g)\varphi(h)$

$= \omega^{-1}1_V \cdot \varphi(h)^{-1} \cdot \omega 1_V \cdot \varphi(h) = 1_V$

$\Rightarrow g^{-1}h^{-1}gh \in \bigcap_{\varphi : Irr} \ker\varphi = 1 \Rightarrow g \in Z(G)$.

命题 2.5.6. 群的可解性能从特征标表读出.

Pf: 可解 $\Leftrightarrow G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq \cdots$ 止于 1. $\Leftrightarrow \exists$ 正规子群列 $G \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_m = 1$ s.t. G_i/G_{i+1} = 素

命题 2.5.7. 群的幂零性能从特征标表读出.

Pf: $G_1 \leq G_2 \leq \cdots\cdots \leq G$ $G_n/G_{n-1} = Z(G/G_{n-1})$

幂零 $\Leftrightarrow \exists n$ s.t. $G = G_n$.

给定某有限群 G 的特征标表，读取如下相关信息：

1) 确定所有的忠实不可约表示

2) G 的全体正规子群，及其商群的特征标表

3) G'，$[G:G']$

4) G 的中心，G 的幂零性

5) G 的单性与可解性

6) 找出所有与自身逆共轭的元素 ($\Leftrightarrow \chi(g)\in\mathbb{R}, \forall\chi$)

7) $|C_G(g)| = ?$ $\left(\sum_{\chi:\text{irr}} |\chi(g)|^2\right)$ (补全 h_g?)

§2.6. 整性定理与不可约复表示的维数

定理 2.6.8： $\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G \Rightarrow \chi(1) \mid [G:Z(G)]$

特别地：$\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G \Rightarrow \chi(1) \mid |G|$

代数整数 $\overline{\mathbb{Z}} = \{\alpha\in\mathbb{C} \mid \alpha$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 中首一多项式的根$\}$

性质：1). $\overline{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

2). $\forall \alpha\in\mathbb{C}$. $\alpha\in\overline{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \mathbb{Z}[\alpha]$ = 有限生成群

3). $\overline{\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ 为子环.

4). χ = 复特征标 $\Rightarrow \chi(g)\in\overline{\mathbb{Z}} \quad \forall g\in G$. eg. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\in\overline{\mathbb{Z}}$

引理 2.6.6 $\chi\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \Rightarrow \dfrac{[G:C_G(g)]\chi(g)}{\chi(1)}\in\overline{\mathbb{Z}}$

Pf: • $(V,\varphi)\subset(\mathbb{C}G,\varphi_{reg})$ 不可约. $\chi=\chi_\varphi$.

$C_g :=$ g 所在共轭类 $\quad (\Rightarrow |C_g| = [G:C_G(g)]$

$$\phi = \sum_{h\in C_g}\varphi(h) \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$$

Schur $\Rightarrow \phi = \lambda\cdot 1_V \Rightarrow \lambda\cdot\chi(1) = tr(\phi) = \sum_{h\in C_g}\chi(h) = |C_g|\cdot\chi(g)$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{[G:C_G(g)]\chi(g)}{\chi(1)}$$

• $\psi := \sum_{h\in C_g}\varphi_{reg}(h) \Rightarrow \phi = \psi|_V \Rightarrow \lambda$ 为 ψ 特征值

ψ 在基 G 下为 0-1 阵 $\Rightarrow \lambda\in\overline{\mathbb{Z}} \Rightarrow \checkmark$

定理的证明：$\chi(1) \mid |G|$：

行正交 $\Rightarrow \dfrac{|G|}{\chi(1)} = \dfrac{1}{\chi(1)}\sum_{i=1}^{s}|C_g|\cdot\chi(g_i)\overline{\chi(g_i)} = \sum_{i=1}^{s}\dfrac{[G:C_G(g_i)]\chi(g_i)}{\chi(1)}\cdot\overline{\chi(g_i)}\in\overline{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow \dfrac{|G|}{\chi(1)}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \chi(1) \mid |G|$

$\chi(1) \mid [G:Z(G)]$ $g \in Z(G) \Rightarrow \rho(g) \in Hom_G(V,V) \Rightarrow \rho(g) = \lambda(g)\cdot 1_V$ $\lambda(g) \in \mathbb{C}^*$

$\underbrace{\rho \# \rho \# \cdots \# \rho}_{m}$ 不可约

$H_m := \{(g_1,\cdots,g_m) \in Z(G)^m \mid g_1\cdots g_m = 1\} \lhd G^m = \overbrace{G \times \cdots \times G}^{m}$

$\Rightarrow H_m \subseteq \ker(\rho \# \cdots \# \rho)$

$\Rightarrow V^{\otimes m}$ 为 G^m/H_m 的不可约表示

$\Rightarrow \chi(1)^m \mid |G|^m/Z(G)^{m-1}$ $(\forall m)$

$\Rightarrow \chi(1) \mid [G:Z(G)]$

§2.7 Burnside 可解性定理

i.e. $p^a q^b$ 阶群均可解

定理 2.7.4. (Burnside 1904) $\#G = p^a q^b \Rightarrow G$ 可解

Thm (Feit-Thompson 1963, Burnside conj 1911) 奇数阶群可解.

255页证明!

性质 2.7.1. 1) TFAE

可解群基本性质

G 可解 $\Leftrightarrow \exists$ 次正规列 $G=G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleleft G_m=\{1\}$ s.t. G_{i-1}/G_i = abel. $\forall i$

$\Leftrightarrow \exists$ 正规列 $G=G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleleft G_m=\{1\}$ 且 $G_i \triangleleft G$ s.t. G_{i-1}/G_i = abel. $\forall i$

$\Leftrightarrow \exists$ 次正规子列 s.t. 因子群均为素数阶

$\Leftrightarrow \exists$ 次正规子列 s.t. 因子群均为素数幂阶

$\Leftrightarrow \exists$ 正规子列 s.t. 因子群均为素数幂阶

2) 可解群的子商仍为可解群

3) N & G/N 可解 $\Rightarrow G$ 可解

4) S_n 可解 $\Leftrightarrow n \leq 4$

5) D_n 可解

6) p 群可解

引理 2.7.2. $\alpha = \zeta_{m_1} + \zeta_{m_2} + \cdots + \zeta_{m_n}$ & $\frac{\alpha}{n} \in \overline{\mathbb{Z}} \Rightarrow \alpha = 0$ 或 $n\zeta$ (ζ 单位根)

Pf: 不妨设 $\alpha \neq 0$. 则

$$\left.\begin{array}{l} Norm\left(\frac{\alpha}{n}\right) \in \mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \\ 0 \neq \left|Norm\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right| = \prod_\sigma \left|\frac{\sigma(\alpha)}{n}\right| \leq 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{n}\right| = 1 \ \forall \sigma \\ \Rightarrow \alpha = n\zeta \ (\zeta \text{为单位根}) \end{array}$$

引理 2.7.3. 若 $\exists$ 共轭类 C 个数为 p^t $(t \geq 1)$, 则 $G \neq$ 单.

即, 若 G 非 Abel 单, 则 $\{1\}$ 为仅有的素数幂阶共轭类.

Pf: 设 G 非 Abel 单. $\forall g\in C\setminus\{1\}$.

列正交 $\Rightarrow 0=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{s}\chi_i(1)\chi_i(g)=\frac{1}{p}+\sum_{i=2}^{s}\frac{\chi_i(1)\chi_i(g)}{p}$

$\Rightarrow \exists i$ s.t. $\frac{\chi_i(1)}{p}\notin\overline{\mathbb{Z}} \Rightarrow p\nmid\chi_i(1)\Rightarrow \gcd(|C|,\chi_i(1))=1$

$\Rightarrow \exists a,b\in\mathbb{Z}$ s.t. $a|C|+b\chi_i(1)=1$

$\Rightarrow \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)}=a\cdot\frac{|C|\cdot\chi_i(g)}{\chi_i(1)}+b\cdot\chi_i(g)\in\overline{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow \chi_i(g)=\omega\cdot\chi_i(1)$

$\Rightarrow g\in Z(\chi_i)\lhd G$

仅需证明 $G\neq Z(\chi_i)$.

(否则. $\forall h\in G$, $\rho_i(h)=\omega_h\cdot 1_{V_i}$

V_i 不可约 $\Rightarrow \dim V_i=1\Rightarrow \ker\rho_i\lhd G$ 非平凡 矛盾)

Burnside 定理证明: 对 $|G|$ 归纳.

$H:=$ Sylow p-子群

$\forall g\in Z(H)\setminus\{1\}$ ($Z(H)\neq\{1\}$.)

$H\subseteq C_G(g)\Rightarrow [G:C_G(g)]\,\big|\,q^b\Rightarrow g$ 所在共轭类阶为 q^t $(t\geq 0)$

1° $t\geq 1\Rightarrow \exists\{1\}\subsetneq N\subsetneq G \overset{\text{归纳}}{\Rightarrow} G$ 可解

2° $t=0\Rightarrow g\in Z(G)\overset{\text{归纳}}{\Longrightarrow} G$ 可解

§ 补充: Fourier 变换.

$G=$ 有限群

定理 (Fourier 变换): $(\mathrm{Fun}_{\mathbb{C}}(G),+,*) \overset{\varphi}{\cong} \bigoplus_{(V,\rho):\mathrm{irr}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 为 $\mathbb{C}$ 代数同构.

$$f \mapsto \hat{f} = \Big(\underbrace{\sum_{x\in G} f(x)\,\rho(x)}_{\hat{f}(\rho)}\Big)_{\rho:\mathrm{irr}}$$

注 (卷积的代数理解): $(\mathbb{C}[G],+,\cdot) \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Fun}_{\mathbb{C}}(G),+,*)$ 为 $\mathbb{C}$ 代数同构

$$\sum a_g g \longmapsto (g \mapsto a_g)$$

性质: $\widehat{f*g}(\rho) = \hat{f}(\rho)\cdot\hat{g}(\rho)$

$\hat{G} :=$ 不可约表示同构类集

- Fourier 变换: $\forall f: G\to\mathbb{C}$, $\forall \rho: G\to GL(V)$

$$\hat{f}(\rho) := \sum_{x\in G} f(x)\cdot\rho(x) \qquad \text{(加权平均)}$$

- Fourier 逆变换:

$$f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in\hat{G}} \deg(\rho)\cdot \mathrm{Tr}\big(\rho(x^{-1})\hat{f}(\rho)\big) = \frac{1}{|G|}\mathrm{Tr}\big(\rho_{\mathrm{reg}}(x^{-1})\hat{f}(\rho_{\mathrm{reg}})\big)$$

$G=$ 有限 abel 群 $\qquad \hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1)$ Pontryagin dual

Fourier 变换: $\forall f: G\to\mathbb{C}$, 定义 $\hat{f}: \hat{G}\to\mathbb{C}$ 为

$$\hat{f}(\chi) := \sum_{x\in G} f(x)\,\overline{\chi}(x) \quad \Big(\hat{f}(\chi) = \sum_x f(x)\,\chi(x)\Big)$$

Fourier 逆变换: $f(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}} \hat{f}(\chi)\,\chi(a) \quad \Big(f = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi}\hat{f}(\chi)\,\chi(a^{-1})\Big)$